

# LOGARITMICKÉ ROVNICE - CHCETE BÝT MILIONÁŘEM ŘEŠENÍ

1.  $\log_2(0,5 + x) = \log_2 0,5 - \log_2 x$

**ŘEŠENÍ:**

Na pravou stranu rovnice použijeme druhou větu o logaritmech:  $\log_c a - \log_c b = \log_c \frac{a}{b}$

$$\log_2(0,5 + x) = \log_2 \frac{0,5}{x}$$

Porovnáme argumenty:

$$0,5 + x = \frac{0,5}{x}$$

Celou rovnici vynásobíme  $x$ :

$$0,5x + x^2 = 0,5$$

Celou rovnici vynásobíme číslem 2:

$$x + 2x^2 = 1$$

Sestavíme kvadratickou rovnici:

$$2x^2 + x - 1 = 0$$

Vyřešíme kvadratickou rovnici podle vzorce:

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1+8}}{4} = \frac{-1 \pm 3}{4}$$

$$x_1 = \frac{-1 + 3}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-1 - 3}{4} = \frac{-4}{4} = -1$$

Určíme podmínky:

$$0,5 + x > 0 \Rightarrow x > -0,5$$

$$x > 0$$

Určíme řešení rovnice:

$$K = \left\{ \frac{1}{2} \right\}$$

$$2. \frac{2 \log 3x}{\log(2-7x)} = 1$$

**ŘEŠENÍ:**

Celou rovnici vynásobíme jmenovatelem  $\log(2-7x)$

$$2 \log 3x = \log(2-7x)$$

Použijeme třetí větu o logaritmech:  $\log_c a^n = n \cdot \log_c a$

$$\log(3x)^2 = \log(2-7x)$$

Porovnáme argumenty:

$$(3x)^2 = 2 - 7x$$

$$9x^2 = 2 - 7x$$

Sestavíme kvadratickou rovnici:

$$9x^2 + 7x - 2 = 0$$

Vyřešíme pomocí vzorce pro kvadratickou rovnici:

$$x_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{49 + 72}}{18} = \frac{-7 \pm \sqrt{121}}{18} = \frac{-7 \pm 11}{18}$$

$$x_1 = \frac{-7 + 11}{18} = \frac{4}{18} = \frac{2}{9}$$

$$x_2 = \frac{-7 - 11}{18} = \frac{-18}{18} = -1$$

Určíme podmínky:

$$3x > 0 \Rightarrow x > 0$$

$$2 - 7x > 0 \Rightarrow -7x > -2 \Rightarrow x < \frac{2}{7}$$

$$\log(2-7x) \neq 0 \Rightarrow 2-7x \neq 1 \Rightarrow 7x \neq 1 \Rightarrow x \neq \frac{1}{7}$$

Určíme celkové řešení:

$$K = \left\{ \frac{2}{9} \right\}$$

$$3. \quad 3 - \log 2x = \frac{2}{\log 2x}$$

**ŘEŠENÍ:**

Zavedeme substituci:  $\log 2x = a$  a dosadíme do rovnice:

$$3 - a = \frac{2}{a}$$

Celou rovnici vynásobíme neznámou  $a$  a sestavíme kvadratickou rovnici:

$$\begin{aligned} 3a - a^2 &= 2 \\ -a^2 + 3a - 2 &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ a^2 - 3a + 2 &= 0 \end{aligned}$$

Řešíme pomocí vzorce nebo rozkladem na součin:

$$\begin{aligned} (a - 1)(a - 2) &= 0 \\ a_1 &= 1 \\ a_2 &= 2 \end{aligned}$$

Určíme podmínky pro  $a$ :

$$a \neq 0$$

Podmínkám pro  $a$  vyhovují oba výsledky. Dosadíme do substituce a dopočítáme  $x$ :

$$\begin{aligned} a_1 = 1 &\Rightarrow \log 2x = 1 \Rightarrow 2x = 10^1 \Rightarrow x = 5 \\ a_2 = 2 &\Rightarrow \log 2x = 2 \Rightarrow 2x = 10^2 \Rightarrow x = 50 \end{aligned}$$

Určíme podmínky pro  $x$  ze zadané rovnice:

$$2x > 0 \Rightarrow x > 0$$

Určíme konečné řešení:

$$K = \{5; 50\}$$

$$4. \ln x^7 - \ln x^5 = \ln x^3 + 3$$

**ŘEŠENÍ:**

Použijeme třetí větu o logaritmech:  $\log_c a^n = n \cdot \log_c a$

$$7 \cdot \ln x - 5 \ln x = 3 \ln x + 3$$

$$2 \ln x = 3 \ln x + 3$$

$$- \ln x = 3 \quad / \cdot (-1)$$

$$\ln x = -3$$

$$x = e^{-3}$$

Určíme podmínky:

$$x^7 > 0, x^5 > 0, x^3 > 0 \Rightarrow x > 0$$

Určíme konečné řešení:

$$K = \{e^{-3}\}$$

$$5. \log_{16} 4x = \log_4 x$$

**ŘEŠENÍ:**

Rovnici převedeme na stejný základ 4 pomocí převodního vzorce:  $\log_a b = \frac{\log_c b}{\log_c a}$

$$\begin{aligned}\frac{\log_4 4x}{\log_4 16} &= \log_4 x \\ \frac{\log_4 4x}{2} &= \log_4 x \quad / \cdot 2 \\ \log_4(4x) &= 2 \log_4 x\end{aligned}$$

Pomocí první věty o logaritmech upravíme levou stranu rovnice:

$$\begin{aligned}\log_4 4 + \log_4 x &= 2 \log_4 x \\ 1 + \log_4 x &= 2 \log_4 x \\ -\log_4 x &= -1 \quad / \cdot (-1) \\ \log_4 x &= 1 \\ x &= 4^1 = 4\end{aligned}$$

Určíme podmínky:

$$\begin{aligned}4x > 0 &\Rightarrow x > 0 \\ x &> 0\end{aligned}$$

Určíme konečné řešení:

$$K = \{4\}$$

$$6. \frac{1 + \log_5(x+5)}{\log_5(5-x)} = 2$$

### ŘEŠENÍ:

Celou rovnici vynásobíme jmenovatelem  $\log_5(5-x)$ :

$$1 + \log_5(x+5) = 2 \log_5(5-x)$$

Číslo 1 převedeme na logaritmus při základu 5.

$$\log_5 5 + \log_5(x+5) = 2 \log_5(5-x)$$

Levou stranu převedeme pomocí první věty o logaritmech, pravou pomocí třetí věty o logaritmech:

$$\log_5(5 \cdot (x+5)) = \log_5(5-x)^2$$

Porovnáme argumenty:

$$\begin{aligned} 5(x+5) &= (5-x)^2 \\ 5x + 25 &= 25 - 10x + x^2 \end{aligned}$$

Sestavíme kvadratickou rovnici:

$$\begin{aligned} -x^2 + 15x &= 0 \quad / \cdot (-1) \\ x^2 - 15x &= 0 \\ x(x-15) &= 0 \\ x_1 &= 0 \\ x_2 &= 15 \end{aligned}$$

Určíme podmínky:

$$\begin{aligned} x+5 > 0 &\Rightarrow x > -5 \\ 5-x > 0 &\Rightarrow x < 5 \\ \log_5(5-x) \neq 0 &\Rightarrow 5-x \neq 1 \Rightarrow x \neq 4 \end{aligned}$$

Určíme konečné řešení:

$$K = \{0\}$$